SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001

Annamaria Montanari

REGOLARITÀ OTTIMALE PER LE SOLUZIONI STRETTAMENTE LEVI-CONVESSE PER L'EQUAZIONE DI LEVI MONGE-AMPÈRE

6 marzo 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Sunto Presentiamo un risultato di regolarità C^∞ per le soluzioni strettamente Levi convesse dell'equazione di Levi Monge-Ampère in $\mathbb{R}^{2n+1}$. Si tratta di un'equazione totalmente nonlineare che interviene nello studio di ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{n+1}$, per $n \geq 2$. L'equazione è ellittica degenere anche se ristretta alla classe delle funzioni strettamente Levi convesse. Tenendo conto della particolare struttura dell'equazione, stabiliamo delle stime a priori interne per le derivate seconde intrinseche delle soluzioni. Il risultato di regolarità ottimale si ottiene poi utilizzando un metodo iterativo di bootstrap.

Abstract The Levi Monge-Ampère equation naturally arises in the study of envelopes of holomorphy in the theory of holomorphic functions in $\mathbb{C}^{n+1}$. See [15], [19], [20], [26] for details on this matter.

Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{C}^{n+1}$ and the boundary is a C^2 manifold M. Let ρ be a local defining function for Ω in a neighborhood U_p of $p \in M$ and $\partial\rho = (\partial_1\rho, \cdots, \partial_{n+1}\rho) \neq 0$ in U_p. In this situation the Levi form Λ is Hermitian form related to the complex Hessian $(\partial_{l\bar{j}}\rho)$ of the defining function ρ, restricted to the complex space of tangent vectors to the hypersurface. Assume for example $\partial_{n+1}\rho \neq 0$ in U_p. Then the coefficients of the Hermitian form Λ in n complex variables are

$$\lambda_{l\bar{j}} = \frac{\rho_{n+1}\rho_{\overline{n+1}}\partial_{l\bar{j}}\rho - \rho_{n+1}\rho_{\bar{j}}\partial_{l\overline{n+1}}\rho - \rho_l\rho_{\overline{n+1}}\partial_{n+1\bar{j}}\rho + \rho_l\rho_{\bar{j}}\partial_{n+1\overline{n+1}}\rho}{|\rho_{n+1}|^2}$$

where the subscript denote partial derivatives.

Definition 1 *We say that M is strictly Levi convex at $p \in M$ if Λ is positive definite at p, and M is strictly Levi convex if it is strictly Levi convex at every point $p \in M$. Moreover, we will denote by*

$$k(p) = \det(\Lambda)\frac{|\rho_{n+1}|^2}{|\partial\rho|^{n+2}} \tag{1}$$

the total Levi curvature of M at p.

For prescribed k, we will say that (1) is the Levi Monge-Ampère equation.
There are several analogies between (1) and the prescribed Gauss curvature equation of a real hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$. However, the classical Gauss curvature equation is elliptic if tested on strictly convex function (see for example [18]), while the Levi Monge-Ampère equation (1) is a fully nonlinear degenerate elliptic equation even if computed on strictly Levi convex functions (see [22]).

In [22] we proved that if ρ has Hölder continuous second order derivatives and ρ is a strictly Levi convex solution of the fully nonlinear equation (1) with k smooth, then ρ is smooth. Existence results of continuous viscosity solutions of the Dirichlet problem related to the fully nonlinear equation in (1), but with denominator $|\partial\rho|^{3n}$, has been proved in [29].

1 La forma di Levi e i domini di olomorfia

La forma di di Levi interviene nello studio dei domini di olomorfia (si veda ad esempio [31]). Ricordiamo che un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia se per ogni $z_0 \in \partial\Omega$, esiste una funzione f_{z_0} olomorfa in Ω e completamente singolare in z_0, cioè per ogni intorno U di z_0 non esiste una funzione olomorfa in U che coincide con f_{z_0} in $\Omega \cap U$. Ogni insieme aperto Ω in $\mathbb{C}^1$ è un dominio di olomorfia (per $z_0 \in \partial\Omega$, si prenda ad esempio $f_{z_0}(z) = (z - z_0)^{-1}$), mentre nel 1906 Hartogs scoprì l'esistenza di domini Ω di $\mathbb{C}^2$ con la proprietà che ogni funzione olomorfa in Ω si estende necessariamente a insiemi strettamente più grandi. Da allora questo fenomeno è divenuto un problema centrale nella teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse.

Nel 1910 E. E. Levi osservò che, se un dominio con bordo regolare è un dominio di olomorfia, allora la forma di Levi è semidefinita sul bordo. Il problema maggiore consiste nel mostrare che, se la forma di Levi del bordo di un dominio Ω è definita positiva, allora almeno localmente Ω è un dominio di olomorfia. Questo problema, che è divenuto noto in letteratura come problema di Levi, richiede la costruzione di funzioni globalmente olomorfe con qualche specifica proprietà locale. Il problema di Levi è stato risolto per la prima volta nel 1942 da Oka [25] in $\mathbb{C}^2$. In dimensione arbitraria è stato risolto da Oka [25], Bremermann [2] e Norguet [24] nei primi anni '50. Si vedano [15], [19], [20], [26] per ulteriori dettagli sull'argomento.

Supponiamo che Ω sia un dominio in $\mathbb{C}^{n+1}$ con bordo una varietà differenziabile M. Sia U_{z_0} un intorno di $z_0 \in M$ e sia ρ tale che

$$
\begin{aligned}
&\rho : U_{z_0} \to \mathbb{R}\,\text{differenziabile}\\
&\rho < 0\,\text{in}\,\Omega \cap U_{z_0}\\
&\rho = 0\,\text{in}\,M \cap U_{z_0}\\
&\partial\rho \neq 0\,\text{in}\,U_{z_0},
\end{aligned}
$$

dove $\partial\rho = (\partial_1\rho, \cdots, \partial_{n+1}\rho)$.
Se ρ è di classe C^2 allora la forma di Levi $L(\rho)$ è la forma Hermitiana relativa alla matrice Hessiana complessa $(\partial_{l\bar{j}}\rho)$ della funzione ρ ristretta allo spazio tangente complesso $T^{\mathbb{C}}_{z_0}$ all'ipersuperficie in z_0. Supponiamo ad esempio $\partial_{n+1}\rho \neq 0$ in U_{z_0} e scegliamo come base di $T^{\mathbb{C}}_{z_0}$ i vettori

$$h_l = \frac{(\partial_{\bar{z}_{n+1}}\rho)e_l - (\partial_{\bar{z}_l}\rho)e_{n+1}}{|\partial_{\bar{z}_{n+1}}\rho|}$$

dove $(e_l)_{l=1,\dots,n+1}$ è la base canonica di $\mathbb{C}^{n+1}$. Allora i coefficienti della forma Hermitiana $L(\rho)$ in n variabili complesse sono

$$A_{l\bar{p}}(\rho) = \langle (Hess_{\mathbb{C}}\rho)h_l, h_p\rangle, \quad \forall\, l, p = 1, \dots, n.$$

Precisamente (si veda [15])

$$A_{l\bar{p}}(\rho) = \frac{|\rho_{n+1}|^2 \partial_l \partial_{\bar{p}} \rho - \rho_l \rho_{\overline{n+1}} \partial_{n+1} \partial_{\bar{p}} \rho - \rho_{n+1} \rho_{\bar{p}} \partial_l \partial_{\overline{n+1}} \rho + \rho_l \rho_{\bar{p}} \partial_{n+1} \partial_{\overline{n+1}} \rho}{|\rho_{n+1}|^2}, \qquad (1)$$

dove i pedici denotano le derivate parziali.

È importante osservare che la forma di Levi è invariante per trasformazioni biolomorfe delle coordinate e non dipende dalla funzione ρ (si vedano ad esempio [26], [15]).

Introduciamo ora le coordinate reali e scriviamo $z_l = x_l + iy_l$ per ogni $l = 1, \ldots, n+1$. Poichè per ipotesi $\partial_{z_{n+1}} \rho \neq 0$, non è restrittivo supporre $\partial_{y_{n+1}} \rho \neq 0$. Con questa convenzione possiamo scrivere localmente M come il grafico di una funzione di classe C^2, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{2n+1}$. In particolare, scegliendo $\rho = 4(u - y_{n+1})$, allora $M = \{y_{n+1} = u(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, x_{n+1})\}$.
I coefficienti $A_{l\bar{p}}(u)$ della forma di Levi $L(u)$ sono allora operatori quasilineari su $\mathbb{R}^{2n+1}$ e precisamente:

$$\begin{aligned} Re(A_{l\bar{p}}(u)) =& (\partial_{x_l x_p} u + \partial_{y_l y_p} u + a_l \partial_{x_p x_{n+1}} u + a_p \partial_{x_l x_{n+1}} u \\ &+ b_l \partial_{y_p x_{n+1}} u + b_p \partial_{y_l x_{n+1}} u + (a_l a_p + b_l b_p) \partial^2_{x_{n+1}} u) \\ Im(A_{l\bar{p}}(u)) =& (\partial_{x_l y_p} u - \partial_{x_p y_l} u - a_p \partial_{y_l x_{n+1}} u + a_l \partial_{y_p x_{n+1}} u \\ &+ b_p \partial_{x_l x_{n+1}} u - b_l \partial_{x_p x_{n+1}} u + (b_p a_l - b_l a_p) \partial^2_{x_{n+1}} u) \end{aligned} \qquad (2)$$

dove

$$a_l = \frac{\partial_{y_l} u - \partial_{x_l} u \, \partial_{x_{n+1}} u}{1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2}, \quad b_l = \frac{-\partial_{x_l} u - \partial_{y_l} u \, \partial_{x_{n+1}} u}{1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2}. \qquad (3)$$

Osserviamo in particolare che per ogni $l = 1, \ldots, n$ i coefficienti della diagonale della forma di Levi

$$A_{l\bar{l}}(u) = \partial_{x_l x_l} u + \partial_{y_l y_l} u + 2a_l \partial_{x_l x_{n+1}} u + 2b_l \partial_{y_l x_{n+1}} u + (a_l^2 + b_l^2) \partial^2_{x_{n+1}} u$$

sono operatori ellittici degeneri con forma caratteristica

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{2n+1}) \longrightarrow (\xi_{2l-1} + a_l \xi_{2n+1})^2 + (\xi_{2l} + b_l \xi_{2n+1})^2$$

semidefinita positiva, ma con $2n - 1$ autovalori nulli.

2 Funzioni strettamente Levi convesse e equazione di Levi Monge-Ampère

Definiamo l'operatore di Levi Monge-Ampère come

$$LMA(u) = det(A_{l\bar{p}}(u)). \qquad (4)$$

Definizione 2.1. *Diciamo che* $u \in C^2(\Omega)$ *è Levi convessa (strettamente Levi convessa) in* ξ_0 *se* $L(u)(\xi_0) \geq 0$ *(*> 0*) e Levi convessa (strettamente Levi convessa) in* Ω *se* $L(u)(\xi) \geq 0$ *(*> 0*) per ogni* $\xi \in \Omega$.

In [29] Slodkowski e Tomassini hanno esteso queste definizioni alle funzioni continue e hanno dimostrato l'esistenza di soluzioni viscose $u \in Lip(\bar{\Omega})$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} LMA(u) = k(\cdot, u)(1 + |Du|^2)^{\frac{3n}{2}} & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{sul } \partial\Omega \\ u \quad \text{è Levi convessa} & \end{cases} \tag{5}$$

dove Du è il gradiente euclideo di u in $\mathbb{R}^{2n+1}$, $g \in C(\partial\Omega)$, $k \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ e $k \geq 0$. Qui l'aperto Ω è il luogo degli zeri di una funzione C^∞, strettamente Levi convessa, che è legata a k da alcune ipotesi di crescita.
La soluzione che essi trovano è soltanto lipschitziana ed è definita in senso viscoso.

In [22] dimostriamo un primo risultato di regolarità interna per le soluzioni dell'equazione in (5) con un secondo membro più generale e per ogni insieme aperto Ω. Questo risultato è stato annunciato in [21]:

Teorema 2.1. *Se* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *è una soluzione strettamente Levi convessa dell'equazione di Levi Monge-Ampère*

$$LMA(u) = q(\cdot, u, Du) \tag{6}$$

in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ *e* $q \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1})$ *è positiva, allora* $u \in C^\infty(\Omega)$.

Qui abbiamo indicato con $C^{m,\alpha}$ lo spazio ordinario delle funzioni hölderiane rispetto alla metrica euclidea.

Se in (6) scegliamo

$$q(\cdot, u, Du) = k(\cdot, u)\frac{(1 + |Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}}{1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2} \tag{7}$$

allora k rappresenta una sorta di "curvatura totale di Levi" di M ed è l'analogo della curvatura di Gauss per un'ipersuperficie reale in $\mathbb{R}^{n+1}$ (cfr. [18]).

Ad esempio, se M è una sfera di raggio R e centro l'origine, allora possiamo scegliere la funzione che definisce l'ipersuperficie come $\rho = |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 - R^2$. In tal caso la curvatura di M è costante in ogni punto e $k \equiv R^{-n}$.

L'operatore di Levi Monge-Ampère è un operatore totalmente nonlineare e ellittico degenere, anche se ristretto alla classe delle funzioni strettamente Levi convesse. Infatti, se chiamiamo D^2u la matrice hessiana reale di u, allora per (2) esiste una funzione $F = F(p, r)$, con $p = Du$ e $r = D^2u$, tale che

$$LMA(u) = F(Du, D^2u)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_{mj}}(Du, D^2u) \geq 0.$$

Inoltre in [22] dimostriamo che il più piccolo autovalore della matrice reale $\left(\frac{\partial F}{\partial r_{mj}}\right)_{m,j=1}^{2n+1}$ è identicamente nullo. Pertanto per studiare questa equazione siamo costretti a sviluppare delle tecniche diverse da quelle usate per studiare l'equazione classica di Monge-Ampère e l'equazione di Monge-Ampère complessa, che sono ellittiche se ristrette alla classe delle funzioni strettamente convesse e strettamente plurisubarmoniche, rispettivamente (si vedano [18], [1], [3]).

Osserviamo che nel caso $n = 1$ l'operatore $LMA(u)$ definito in (4) coincide con l'unico coefficiente $A_{1\bar{1}}$ della forma di Levi $L(u)$ e in questo caso l'equazione (6) diviene quasilineare (si veda ad esempio [30]). Proprietà di regolarità delle sue soluzioni sono state recentemente studiate in [5], [6], [11], [8], [9], [12], [13], [14], [7]. Inoltre in [10] sono state studiate proprietà di regolarità per l'analogo dell'equazione con assegnata curvatura media per un'ipersuperficie reale in $\mathbb{C}^{n+1}$: l'operatore che interviene in questo caso è quasilineare ed è definito come la traccia della forma di Levi $L(u)$.

3 Struttura dell'operatore LMA

Sia $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ una soluzione strettamente Levi convessa di (6) e definiamo per ogni $l = 1, \ldots, n$ i campi vettoriali nonlineari del primo ordine

$$X_l = \partial_{x_l} + a_l \partial_{x_{n+1}}, \quad Y_l = \partial_{y_l} + b_l \partial_{x_{n+1}}, \tag{8}$$

i cui coefficienti a_l e b_l sono funzioni C^∞ delle derivate parziali prime di u come in (3). In seguito useremo anche la seguente notazione:

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \qquad b = (b_1, \ldots, b_n). \tag{9}$$

Poichè la soluzione fissata u è di classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$, allora i coefficienti a, b sono funzioni $C^{1,\alpha}(\Omega)$.

La prima osservazione importante contenuta in [22] è che si possono scrivere i coefficienti della forma di Levi $A_{l\bar{p}}$ utilizzando i campi vettoriali nonlineari definiti in (8), come si può verificare a posteriori con un calcolo diretto:

$$A_{l\bar{l}}(u) = (1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2)(X_l^2 u + Y_l^2 u), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Re(A_{l\bar{p}}(u)) &= \frac{(1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2)}{2}(X_l X_p u + X_p X_l u + Y_l Y_p u + Y_p Y_l u), \\ Im(A_{l\bar{p}}(u)) &= \frac{(1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2)}{2}(X_l Y_p u + Y_p X_l u - Y_l X_p u - X_p Y_l u). \end{aligned}$$

Per ogni $l = 1, \dots, n$ poniamo

$$Z_{2l} = Y_l, \quad Z_{2l-1} = X_l, \qquad Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n}), \qquad Z^2u = (Z_l Z_p u)_{l,p=1}^{2n}. \tag{11}$$

Se chiamiamo

$$\mathcal{H}_{l\bar{p}} = \frac{A_{l\bar{p}}}{1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2},$$

allora $\mathcal{H}_{l\bar{p}} = \overline{\mathcal{H}_{p\bar{l}}}$ e per $l \le p$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{H}_{l\bar{p}} = &\Big(Z_{2l-1}Z_{2p-1}u + Z_{2p-1}Z_{2l-1}u + Z_{2l}Z_{2p}u + Z_{2p}Z_{2l}u\Big) \\ &+ i\Big(Z_{2l-1}Z_{2p}u + Z_{2p}Z_{2l-1}u - Z_{2l}Z_{2p-1}u - Z_{2p-1}Z_{2l}u\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

Definiamo allora

$$\mathcal{H}(Z^2u) = \det(\mathcal{H}_{l\bar{p}}). \tag{13}$$

$\mathcal{H}$ è una funzione C^∞ delle derivate seconde di u rispetto ai campi vettoriali Z_j, $j = 1, \dots, 2n$, e

$$\frac{LMA(u)}{(1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2)^n} = \mathcal{H}(Z^2u).$$

Precisamente, posto $z_{mj} = Z_m Z_j u$ per ogni $m, j = 1, \dots, 2n$, $\mathcal{H}((z_{mj})_{m,j=1}^{2n})$ è il determinante della matrice complessa $n \times n$ il cui coefficiente dell'l-esima riga e p-esima colonna è

$$\frac{z_{2l-1,2p-1} + z_{2p-1,2l-1} + z_{2l,2p} + z_{2p,2l} + i(z_{2l-1,2p} + z_{2p,2l-1} - z_{2l,2p-1} - z_{2p-1,2l})}{2}$$

Ad esempio, per $n = 2$, $\mathcal{H}((z_{mj})_{m,j=1}^4)$ è il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} z_{11} + z_{22} & \frac{z_{13}+z_{31}+z_{24}+z_{42}+i(z_{14}+z_{41}-z_{23}-z_{32})}{2} \\ \frac{z_{13}+z_{31}+z_{24}+z_{42}-i(z_{14}+z_{41}-z_{23}-z_{32})}{2} & z_{33} + z_{44} \end{pmatrix}.$$

Inoltre esiste una funzione C^∞ e positiva K tale che

$$\frac{q(\cdot, u, Du)}{(1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2)^n} = K(\cdot, u, Zu, \partial_{x_{n+1}} u). \tag{14}$$

Infatti, per (3) e (8), per ogni $j = 1, \dots, n$

$$\partial_{x_j} u = X_j u - (\partial_{x_{n+1}} u)\, Y_j u, \qquad \partial_{y_j} u = Y_j u + (\partial_{x_{n+1}} u)\, X_j u.$$

Ad esempio, se $q = k(\cdot, u)\frac{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}}{1+(\partial_{x_{n+1}}u)^2}$ come in (7), allora

$$K = k(\cdot, u)(1 + |Zu|^2)^{\frac{n+2}{2}}(1 + (\partial_{x_{n+1}}u)^2)^{-\frac{n}{2}}. \tag{15}$$

Scriviamo poi l'equazione totalmente nonlineare in (6) come

$$\mathcal{H}(Z^2u) = K(\cdot, u, Zu, \partial_{x_{n+1}}u). \tag{16}$$

Poichè u è strettamente Levi convessa in Ω, in [22] dimostriamo che esiste una costante positiva M tale che

$$\sum_{m,j=1}^{2n} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_{mj}}(Z^2u)\eta_m\eta_j \geq M \sum_{j=1}^{2n} \eta_j^2, \quad \forall \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Inoltre,

$$A_{l\bar{l}}(u) > 0, \quad l = 1, \ldots, n \tag{17}$$

e per (10)

$$\mathcal{H}_{l\bar{l}} = (X_l^2u + Y_l^2u) > 0, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Procedendo come in [5], riconosciamo che

$$[Z_{2l-1}, Z_{2l}] = [X_l, Y_l] = -(X_l^2u + Y_l^2u)\partial_{x_{n+1}}, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Ma allora per (8), (10), (17), (18), la matrice reale $(2n + 1) \times (2n + 1)$ le cui colonne sono i coefficienti dei campi $Z_j, j = 1, \ldots, 2n$ e $[Z_1, Z_2]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & \cdots & a_n & b_n & -\mathcal{H}_{1\bar{1}} \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero in Ω. Pertanto i campi vettoriali

$$Z_1, \ldots, Z_{2n}, [Z_1, Z_2] \tag{19}$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto e generano $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Per equazioni totalmente nonlineari del tipo (16) non ci sono in letteratura risultati di regolarità. Alcuni autori hanno invece studiato equazioni quasilineari relative a campi vettoriali lineari con coefficienti C^∞ (si vedano i lavori [4], [32]) e equazioni quasilineari che si scrivono come somma di quadrati di campi vettoriali con coefficienti poco regolari (si vedano i lavori [5]-[14]).

4 Schema della prova del Teorema 2.1

Derivando formalmente l'equazione (16) rispetto ai campi vettoriali Z_j, $j = 1, \dots, 2n$ e rispetto a $\partial_{x_{n+1}}$, in [22] scopriamo che:

Proposizione 4.1. *Se u è una soluzione di (6) allora la funzione*

$$v = (v_1, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}) = (Z_1 u, \dots, Z_{2n} u, \arctan u_{x_{n+1}}) \tag{20}$$

è una soluzione di

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{2n} h_{ij} Z_i Z_j - \lambda \partial_{x_{n+1}} \Big) v = f(\cdot, u, v, Zv), \tag{21}$$

con $f = (f_1, \dots, f_{2n}, f_{2n+1})$ una funzione C^∞ dei suoi argomenti. Qui i coefficienti h_{ij}, λ dipendendono dalla funzione u fissata e precisamente

$$h_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_{ij}}(Z^2 u),$$

$$\lambda = nK \partial_{x_{n+1}} u + \frac{\partial K}{\partial u_{x_{n+1}}}(1 + (\partial_{x_{n+1}} u)^2), \tag{22}$$

con $\mathcal{H}(Z^2 u)$ e K definiti in (13) e (14) rispettivamente.

Questo risultato è cruciale nel nostro procedimento di regolarità. Ricordiamo che per una soluzione strettamente Levi convessa $u \in C^{2,\alpha}$ di (6) i coefficienti $h_{ij}, \lambda \in C^\alpha$, e i coefficienti a, b di Z sono $C^{1,\alpha}$. Alla luce di (21) definiamo un operatore lineare H come

$$H = \sum_{i,j=1}^{2n} h_{ij} Z_i Z_j - \lambda \partial_{x_{n+1}} \tag{23}$$

con coefficienti α-hölderiani e tali che $h_{ij} = h_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \cdots, 2n$,

$$\sum_{i,j=1}^{2n} h_{ij} \eta_i \eta_j \geq M \sum_{j=1}^{2n} \eta_j^2, \quad \forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \tag{24}$$

per una costante positiva M. Qui i campi vettoriali Z_j sono definiti come in (11) (cfr. anche (8)), con coefficienti a, b definiti in (9) di classe $C^{1,\alpha}$ e assumiamo che siano linearmente indipendenti in ogni punto, insieme ai loro commutatori del primo ordine.

Al nostro operatore H non si possono applicare i risultati di regolarità contenuti in [16], [17] and [27], perchè in questi lavori l'ipotesi di regolarità C^∞ dei coefficienti viene usata in maniera cruciale. Invece una teoria della regolarità per somme di quadrati di campi vettoriali $C^{1,\alpha}$ è stata recentementemente sviluppata da Citti in [5], [6], [7] e da Citti e Montanari in [10], [14]. In particolare, procedendo come in [10, Theorem 4.1.], si può dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 4.2. *Siano* $h_{ij}, \lambda \in C^{m-1,\alpha}_{Z,loc}(\Omega)$ $a, b \in C^{m,\alpha}_{Z,loc}(\Omega)$, $m \geq 2$ *e sia* $v \in C^{2,\alpha}_{Z,loc}(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $Hv = f$ *con* $f \in C^{m-1,\alpha}_{Z,loc}(\Omega)$. *Allora* v *appartiene alla classe* $C^{m+1,\beta}_{Z,loc}(\Omega)$ *per ogni* $\beta \in (0, \alpha)$.

Qui gli spazi $C^{m,\alpha}_Z$ sono definiti in termini della distanza di controllo d_Z associata ai campi vettoriali Z_j, $j = 1, \ldots, 2n$ (si veda [23, pag. 113]) e precisamente per $0 < \alpha < 1$

$$C^{\alpha}_Z(\Omega) = \Big\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. esiste una costante } c > 0 : \\ |v(\xi) - v(\xi_0)| \leq c\, d^{\alpha}_Z(\xi, \xi_0) \text{ per ogni } \xi, \xi_0 \in \Omega \Big\}$$

e

$$C^{1,\alpha}_Z(\Omega) = \{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \exists\, Z_j v \in C^{\alpha}_Z(\Omega) \quad \forall j = 1, \ldots, 2n \}.$$

Se i coefficienti $a, b \in C^{m-1,\alpha}_Z(\Omega)$, $m \geq 2$, definiamo

$$C^{m,\alpha}_Z(\Omega) = \{ v \in C^{m-1,\alpha}_Z(\Omega) \ : \ Z_j v \in C^{m-1,\alpha}_Z(\Omega) \quad \forall j = 1, \ldots, 2n \}. \tag{25}$$

La Proposizione 4.2 si può però applicare all'equazione nonlineare (6) solo per $u \in C^{3,\alpha}_{Z,loc}$. La prova di questa regolarità iniziale si ottiene utilizzando delle stime a priori interne di tipo Schauder per stimare i rapporti incrementali primi di una soluzione strettamente Levi convessa di (6).
Per scrivere le nostre stime a priori abbiamo bisogno di introdurre qualche notazione: se $v \in C^{\alpha}_Z(\Omega)$ definiamo

$$[v]^Z_{\alpha;\Omega} = \sup_{\xi,\zeta \in \Omega} \frac{|v(\xi) - v(\zeta)|}{d^{\alpha}_Z(\xi, \zeta)}.$$

Sia $I = (i_1, \ldots, i_m)$ un multi-indice di lunghezza $|I| = m$, definiamo

$$Z^I = Z_{i_1} Z_{i_2} \cdots Z_{i_m}.$$

Se $v \in C^{m,\alpha}_Z(\Omega)$, con $m = 0, 1, 2, \ldots$, e $0 < \alpha < 1$ definiamo le seminorme

$$[v]^Z_{m,\alpha;\Omega} = \sup_{|I|=m} [Z^I v]^Z_{\alpha;\Omega},$$

e le norme

$$|v|^Z_{m;\Omega} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sup_{|I|=j} \sup_{\Omega} |Z^I v| \right),$$

$$|v|^Z_{m,\alpha;\Omega} = |v|^Z_{m;\Omega} + [v]^Z_{m,\alpha;\Omega}.$$

Proposizione 4.3. *Siano* $h_{ij}, \lambda \in C^{\alpha}_{Z}(\Omega)$, $a, b \in C^{1,\alpha}_{Z}(\Omega)$ *e sia* $v \in C^{2,\alpha}_{Z}(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione lineare* $Hv = f \in C^{\alpha}_{Z}(\Omega)$ *con* H *come in (23). Allora se* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *e* $d_Z(\Omega', \partial\Omega) \geq \delta > 0$, *esiste una costante positiva* c *tale che per ogni* $\beta \in (0, \alpha)$

$$\delta |Zv|^{Z}_{0;\Omega'} + \delta^2 |Z^2 v|^{Z}_{0;\Omega'} + \delta^{2+\beta}[Z^2 v]^{Z}_{\beta;\Omega'} \leq c(\sup_{\Omega} |v| + |f|^{Z}_{0,\alpha;\Omega}) \tag{26}$$

dove c *dipende dalla costante* M *in (24), da* $|h_{ij}|^{Z}_{0,\alpha;\Omega}$, $|\lambda|^{Z}_{0,\alpha;\Omega}$, $|a|^{Z}_{1,\alpha;\Omega}$, $|b|^{Z}_{1,\alpha;\Omega}$ *e da* $n, \alpha, \delta, \Omega$.

Questo procedimento ci permette di dimostrare un primo risultato di regolarità: *se* u *è una soluzione* $C^{2,\alpha}$ *e strettamente Levi convessa di (6) allora la funzione* v *in (20) è una soluzione classica* $C^{2,\beta}_{Z,loc}(\Omega)$ *di (21).*
Ma allora i coefficienti dell'operatore lineare soddisfano le ipotesi minimali per poter applicare la Proposizione 4.2. La dimostrazione del Teorema 2.1 si ottiene poi applicando la Proposizione 4.2 alla funzione v in (20) e utilizzando un metodo iterativo di bootstrap sull'equazione (21).

Riferimenti bibliografici

[1] Z. Blocki, *On the regularity of the Complex Monge-Ampère operator* Kim, Kang-Tae (ed.) et al., Complex geometric analysis in Pohang. POSTECH-BSRI SNU-GARC international conference on several complex variables, Pohang, Korea, June 23–27, 1997. Providence, RI: American Mathematical Society. Contemp. Math. 222, 181-189 (1999).

[2] H. J. Bremermann, *Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum vom n Komplexen Veränderlichten,* Math. Ann. **128** (1954), 63-91.

[3] L. Caffarelli, J.J. Kohn, L. Niremberg, J. Spruck, *The Dirichlet problem for non-linear second order elliptic equations II: Complex Monge-Ampère and uniformlyelliptic equations,* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 209-252.

[4] L. Capogna, D. Danielli, N. Garofalo, *Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations.* Am. J. Math. **118**, No.6, (1996), 1153-1196.

[5] G. Citti, *C^{∞} regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa Cl. Sci., Serie **4** Vol. XXIII (1996), 483-529.

[6] G. Citti, *C^{∞} regularity of solutions of the Levi equation,* Ann. Inst. H. Poincare, Anal. non Linéaire, 15, 4 (1998) 517-534.

[7] G. Citti, *Regularity of a solution of a nonlinear Hörmander type equation.* To appear on Journal of Nonlinear Analysis.

[8] G. Citti, E. Lanconelli, A. Montanari, *On the smoothness of viscosity solutions of the prescribed Levi-curvature equation*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.,**10** (1999) 61-68.

[9] G. Citti, E. Lanconelli, A. Montanari, *Smoothness of Lipschitz continuous graphs with non vanishing Levi curvature*, to appear on Acta Math.

[10] G. Citti, A. Montanari, *C^∞ regularity of solutions of an equation of Levi's type in $\mathbb{R}^{2n+1}$*, to appear on Ann. Mat. Pura Appl.

[11] G. Citti, A. Montanari, *Strong solutions for the Levi curvature equation*, Adv. in Diff. Eq. Vol **5** (1-3) (2000), 323-342.

[12] G. Citti, A. Montanari, *Regularity properties of Levi flat graphs* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série 1 (1999) 1049-1054.

[13] G. Citti, A. Montanari, *Analytic estimates for solutions of the Levi equation*, to appear on J. Diff. Eq.

[14] G. Citti, A. Montanari, *Regularity properties of solutions of a class of elliptic-parabolic nonlinear Levi type equations*, preprint.

[15] J.P. D'Angelo, *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[16] G.B. Folland, *Subelliptic estimates and functions spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. **13**, (1975), 161-207.

[17] G.B. Folland, E.M. Stein, *Estimates for the $\bar\partial_b$ complex and analysis on the Heisenberg group* Comm. Pure and Appl. Math. **20**,(1974) , 429-522.

[18] D. Gilgarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehrer der Math. Wiss. vol. 224, Springer-Verlag, New York (1977).

[19] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* Von Nostrand, Princeton, NJ, 1966.

[20] S. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables,* Wiley, New York, 1982.

[21] F. LASCIALFARI, A. MONTANARI, *Smooth regularity for solutions of the Levi Monge-Ampère equation*, to appear on Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.

[22] A. MONTANARI, F. LASCIALFARI, *The Levi Monge-Ampère equation: smooth regularity of strictly Levi convex solutions*, preprint.

[23] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985) 103-147.

[24] F. NORGUET, *Sur les domains d'holomorphie des fonctions uniformes de plusiers variable complexes (passage du locale au global)*. Bull. Soc. Math. France **82** (1954), 137-159.

[25] K. OKA, Collected Papers. Transl. by R. Narasimhan, with comments by H. Cartan, R. Remmert, ed. Springer-Verlag, New York, 1984.

[26] R.M. RANGE, *Holomorphic Functions and Integral Representation Formulas in Several Complex Variables* Springer-Verlag, New York, 1986.

[27] L.P. ROTHSHILD, E.M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups* Acta Math., **137** (1977), 247-320.

[28] A. SÁNCHEZ-CALLE, *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields*, Invent. Math., **78** (1984), 143-160.

[29] Z. SLODKOWSKI, G. TOMASSINI, *The Levi equation in higher dimension and relationships to the envelope of holomorphy*, Amer. J. of Math. **116** (1994), 479-499.

[30] Z. SLODKOWSKI, G. TOMASSINI, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal. **101**, no. **4** (1991), 392-407.

[31] G. TOMASSINI, *Geometric Properties of Solutions of the Levi equation*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **152** (1988), 331-344.

[32] C.J. XU, *Regularity for Quasilinear Second-Order Subelliptic Equations*, Comm. Pure and Appl. Math., **45** (1992), 77-96.